DVANAESTA GLAVA

12. LINEARNE JEDNAČINE

Jednačina $ax = b$ ima jedinstveno rešenje $x = \frac{b}{a}$, ako je $a \neq 0$, (određena je).

Jednačina $0 \cdot x = b$, gde je $b \neq 0$, nema rešenja (nemoguća je, nije saglasna).

Jednačina $0 \cdot x = 0$ je identičnost i zadovoljena je za svaki realan broj x (neodređena je).

Pri rešavanju jednačina koristimo, između ostalih, i osobinu da su jednakosti saglasna sa osnovnim računskim operacijama. (Mogu se sabirati, oduzimati, a takođe se mogu množiti i deliti brojevima ili izrazima koji nisu jednaki nuli).

12.1 LINEARNE JEDNAČINE S JEDNOM NEPOZNATOM

△ **1696.** Koje od navedenih jednakosti su identičnosti:

a) $x = 0$; b) $x^2 - 1 = 0$; c) $\frac{x-1}{x+1} = 0$; d) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$;

e) $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$; f) $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$;

g) $5(1-x)^2 - 3(1-x)(1+x) - (3+x)^2 = 7x^2 - 16x - 7$?

△ **1697.** Između navedenih jednačina izdvojiti one koje nemaju rešenja (nemoguće su) i one koje imaju beskonačno mnogo rešenja (neodređene su):

a) $2x + 3 = 2(x-1)$; b) $3(x-2) + 5 = 2x - (1-x)$;

c) $\frac{x-5}{6} - x = \frac{1-x}{3} - \frac{x-7}{2} - \frac{14}{3}$; d) $\frac{7x-6}{3} + \frac{3x+6}{2} = 5x - \frac{7x-6}{6}$;

e) $\left(\frac{x}{2} - 3\right) \cdot 4 = 2x - 1$; f) $\frac{2x+3}{3} - \frac{5x-14}{12} = \frac{x+1}{4} - 3$;

g) $\frac{2x}{3} - \frac{4x}{9} = \frac{2x}{9} - 2$; h) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (x+4)^2 - 9x + 2$.

△ **1698.** Da li su ekvivalentne jednačine (tj. da li imaju ista rešenja):

a) $2x = x + 1$ i $x = 1$; b) $\frac{x}{2} - 3 = 2x - 7$ i $x - 6 = 4x - 14$;

c) $2x = 2x + 1$ i $x = x + 1$; d) $x - 1 = 0$ i $(x-1)^2 = 0$;

e) $2x - \frac{3}{5}x = 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2$ i $15(x+2) = 6(2x+7)$?

△ **1699.** Rešiti po x jednačine:

a) $\frac{6x+7}{7} - 3 = \frac{5x-3}{8}$; b) $\frac{x-5}{2} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3}$;

c) $x + 2\frac{1}{2} = \frac{4x+3}{4} - \frac{2-3x}{8}$; d) $x - \frac{x-1}{3} - \frac{2x-5}{5} + \frac{x+8}{6} = 7$;

e) $\frac{4x}{3} - 17 + \frac{3x-17}{4} = \frac{x+5}{2}$; f) $14\frac{1}{2} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{3x}{2} - \frac{2(x-7)}{3}$;

g) $x - \frac{1 - \frac{3x}{2}}{4} - \frac{2 - \frac{x}{4}}{3} = 2$; h) $\frac{5x-4}{2} = \frac{16x+1}{7}$; i) $\frac{1-9x}{5} = \frac{19+3x}{8}$;

j) $\frac{5-x}{8} = \frac{18-5x}{12}$; k) $\frac{4x+33}{21} = \frac{17+x}{14}$; l) $1 - \frac{2x-5}{6} = \frac{3-x}{4}$;

m) $\frac{x+17}{5} - \frac{3x-7}{4} = -2$; n) $x + \frac{2x-7}{2} - \frac{3x+1}{5} = 5 - \frac{x+6}{2}$;

o) $\frac{3(1,2-x)}{10} - \frac{5+7x}{4} = x - \frac{9x+0,2}{20} - \frac{4(13x-0,6)}{2}$;

p) $x - \frac{\frac{x}{2} - \frac{3+x}{4}}{2} = 3 - \frac{\left(1 - \frac{6-x}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2}$;

q) $\frac{11x-3}{18} + \frac{x - 1\frac{1}{2}}{10} + \frac{9 - \frac{x}{2}}{3} = 5\frac{1}{20}$.

△ **1700.** Rešiti po x jednačine:

a) $(x+5)^2 - (x-1)^2 = 48$; b) $(x+1)^2 - (x-4)^2 = 5$;

c) $(x+4)^2 - (x+8)(x-8) = 96$; d) $3(x+2)^2 + (2x-1)^2 - 7(x+3)(x-3) = 28$;

e) $5(x+3)^2 - 5(x-4)(x+8) + 12 = 87$; f) $(x-2)^3 - (x^2-1)(x-4) + 2x^2 = 7$;

g) $(x-3)(x+4) - 2(3x-2) = (x-4)^2$; h) $(x+5)(x+2) - 3(4x-3) = (x-5)^2$;

i) $2x^2 + (x+5)^2 - 2(x+7)^2 = 2(3x-72,5) + (x-6)^2$;

j) $(x-0,4)^2 - (x+0,4)(x-0,4) = 0,1$.

△ **1701.** Rešiti jednačine:

a) $\frac{3x-5}{x-1} - \frac{2x-5}{x-2} = 1$; b) $\frac{9z-7}{3z-2} - \frac{4z-5}{2z-3} = 1$;

c) $\frac{14}{3y-12} - \frac{2+y}{y-4} = \frac{3}{8-2y} - \frac{5}{6}$; d) $\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 1$;

e) $\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1}$; f) $\frac{t^2-3}{1-t^2} + \frac{t+1}{t-1} = \frac{4}{1+t}$;

g) $\frac{3}{1-6t} = \frac{2}{6t+1} - \frac{8+9t}{36t^2-1}$; h) $\frac{3}{4x-20} + \frac{15}{50-2x^2} + \frac{7}{6x+30} = 0$;

i) $\frac{3}{1-z^2} = \frac{2}{1+2z+z^2} - \frac{5}{1-2z+z^2}$; j) $\frac{y^2+17}{y^2-1} = \frac{y-2}{y+1} - \frac{5}{1-y}$;

k) $5+\frac{96}{x^2-16}=\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}$;

l) $\frac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}=\frac{3x-7}{3-4x}+\frac{6x+5}{4x+3}$;

m) $\frac{5-x}{4x^2-8x}+\frac{7}{8x}=\frac{x-1}{2x^2-4x}+\frac{1}{8x-16}$; n) $1+\frac{5}{x^2-x-6}=-\frac{1}{x+2}$;

o) $\frac{x-9}{x-5}-\frac{x-7}{x-2}-\frac{x-9}{x-4}=\frac{x-8}{x-5}-\frac{x-7}{x-4}-\frac{x-8}{x-2}$;

p) $\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-1}=\frac{4}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}$; q) $\frac{1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{x+4}{x+3}$.

△ **1702.** Rešiti jednačine, vodeći računa o definiciji apsolutne vrednosti:
a) $|x|+1=5$; b) $2|x|-1=|x|+7$; c) $|x|-x=0$;
d) $|5x-2|+x=10$; e) $|1+x|-|x-1|=0$; f) $|x-4|-|2x+3|=2$;
g) $|x+4|+|x-1|=5$; h) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$;
i) $\frac{x+3}{4}-\frac{|x-4|}{9}=\frac{1}{2}-\frac{x+5}{36}$;
j) $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}$;
k) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+1+2x}=\sqrt{4+4x+x^2}$.

△ **1703.** Rešiti po x sledeće jednačine. (Vrednosti parametara su date tako da jednačine imaju jedinstvena rešenja).
a) $(a+x)b-a=(b+1)x+ab$; b) $7(2x-a)-3(4x-a)-5(3x+2a)+a=0$;
c) $\frac{a+x}{b}-2=\frac{x-b}{a}$; d) $\frac{a+bx}{a+b}=\frac{c+dx}{c+d}$; e) $\frac{a-x}{b-a}-\frac{x+a}{a+b}=\frac{2ax}{a^2+b^2}$;
f) $\frac{x+n}{m+n}+\frac{x-n}{m-n}=\frac{1}{m+n}-\frac{x-n}{m^2-n^2}+\frac{2x}{m}$; g) $\frac{x}{a}-\frac{a}{2x}=\frac{2x+a}{2a}-\frac{a}{x}$;
h) $a^2-\frac{a}{b}+\frac{b^2}{ax}=\frac{a^2}{bx}-\frac{b}{x}+b^2$; i) $\frac{a+b}{x}+\frac{a}{b}=-1$;
j) $\frac{3}{x-a}-\frac{2}{x+a}=\frac{3x-7a}{x^2-a^2}$; k) $\frac{x-2a}{x+3a}=3-\frac{2x^2-13a^2}{x^2-9a^2}$.

△ **1704.** Slično prethodnom zadatku, rešiti po y jednačine:
a) $m-\frac{n+y}{n}=n-\frac{m+y}{m}$; b) $\frac{y+a}{a-b}+\frac{y-a}{a+b}=\frac{y+b}{a+b}+\frac{2y-2b}{a-b}$;
c) $\frac{b+y}{a^2+2ab+b^2}+\frac{2y}{a}=\frac{y-b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a+b}+\frac{y-b}{a-b}$; d) $\frac{y+d}{c}-\frac{y-c}{d}=2$.

⋆ **1705.** Rešiti jednačinu

$$\frac{x-29}{1971}+\frac{x-27}{1973}+\frac{x-25}{1975}+\frac{x-23}{1077}+\frac{x-21}{1979}+\frac{x-19}{1981}=$$
$$=\frac{x-1971}{29}+\frac{x-1973}{27}+\frac{x-1975}{25}+\frac{x-1977}{23}+\frac{x-1979}{21}+\frac{x-1981}{19}.$$

△ **1706.** Odrediti vrednost parametra a, tako da budu ekvivalentne jednačine:

a) $ax+1=a-3$ i $\frac{2x+1}{4}-2=\frac{3}{4}$; b) $a+x=1$ i $2a+x=3$;

c) $\dfrac{a+\dfrac{x}{a-1}}{a-\dfrac{x}{a+1}}=\dfrac{a+1}{a-1}$ i $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a+1}{x}=\dfrac{x-a}{2}$;

d) $\dfrac{\dfrac{ax}{2}}{a-x}-\dfrac{\dfrac{x}{a}}{\dfrac{a}{2}-\dfrac{x}{2}}=1+\dfrac{2}{a}$ i $\dfrac{1}{\dfrac{a+2}{ax}-\dfrac{a-2}{2a}}=\dfrac{a}{2}$.

△ **1707.** Odrediti vrednost parametra a, tako da jednačina nema rešenja:

a) $2ax-1=x+a$; b) $a^2x-a=x+1$; c) $(a-3)x=x+2$.

△ **1708.** Odrediti vrednosti parametara a i b, tako da jednačina bude neodređena, odnosno, da bude zadovoljena za svako realno x:

a) $ax+x=b-x$; b) $b(bx-a)=a^2(x-1)$;

c) $(a+x)b-a=(b+1)x+ab$; d) $a-(a+b)x=(b-a)x-(3+bx)$.

1709. Jednačina $\dfrac{x-a}{b-a}+\dfrac{x-b}{a-b}=1$ zadovoljena je za $x=a$ i za $x=b$. Kako je moguće da linearna jednačina ima dva rešenja? Dati obrazloženje.

1710. Date su jednačine po nepoznatim x, y ili z. Diskutovati rešenja ovih jednačina u zavisnosti od vrednosti parametara a, b, c, m, n.

△1) $a(ax+1)=2(2x-1)$; 2) $\dfrac{a-x}{b-a}-\dfrac{a+x}{a+b}=\dfrac{2ax}{a^2-b^2}$;

△3) $\dfrac{x}{a}-b=\dfrac{x}{b}-a$; △4) $\dfrac{x+a}{x+b}=\dfrac{x-b}{x+c}$;

△5) $\dfrac{1}{a^2+a}-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{a+1}-\dfrac{x}{a^2-a}$;

6) $\dfrac{y+p}{q}-\dfrac{q}{p}=\dfrac{y-q}{p}+\dfrac{p}{q}$; 7) $\dfrac{x-a}{bc}+\dfrac{x-b}{ac}+\dfrac{x-c}{ab}=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$;

△8) $\dfrac{x+b}{a+b}+\dfrac{x-b}{a-b}=\dfrac{b+x}{a^2+2ab+b^2}-\dfrac{x-b}{a^2-b^2}+\dfrac{2x}{a}$; △9) $\dfrac{a}{a-x}=\dfrac{b}{b-x}$;

△10) $(a^2-5a+6)x=a-3$; 11) $\dfrac{6x+2a+3b+c}{6x+2a-3b+c}=\dfrac{2x+6a+b+3c}{2x+6a-b-3c}$;

12) $\frac{m-x}{m-n} - \frac{x-n}{m+n} = \frac{2mn}{m^2-n^2}$; △13) $\frac{ax-1}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{ax^2+a}{x^2-1}$;

14) $\frac{a}{c} - \frac{ax}{cx-1} = \frac{c}{a} - \frac{cx}{ax-1}$; 15) $\frac{x}{a^2-b^2} + \frac{2x}{a+b} + \frac{a+b-1}{2a-2b} = \frac{x}{a-b} + 1$;

16) $\frac{x-m-n}{p} + \frac{x-n-p}{m} + \frac{x-p-m}{n} = 3$;

17) $\frac{a+x}{a^2+ax+x^2} + \frac{a-x}{a^2-ax+x^2} = \frac{3a}{a^4x+a^2x^3+x^5}$;

18) $\frac{(x^2+a^2-b^2)(a+x)}{ax} + \frac{(a^2+b^2-x^2)(b+a)}{ab} + \frac{(b^2+x^2-a^2)(x+b)}{bx} = 0$;

△19) $\frac{2x+a}{a} + \frac{x-b}{a} = \frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$; △20) $\frac{2x-m}{m+n} = \frac{2x+n}{m-n}$;

21) $\frac{x-1}{n-1} + \frac{2n^2(1-x)}{n^4-1} = \frac{2x-1}{1-n^4} - \frac{1-x}{1+n}$; 22) $\frac{a+by}{a+b} = \frac{m+ny}{m+n}$;

△23) $\frac{y}{a-1} + \frac{y}{a+1} = \frac{1}{a^2-1}$; 24) $\left(a + \frac{x}{a-b}\right) : \left(a - \frac{x}{a+b}\right) = \frac{a+b}{a-b}$;

△25) $\frac{y}{a-b} + \frac{3}{a+b} = \frac{4by}{a^2-b^2}$;

26) $\frac{x+n}{m+n} + \frac{x-n}{m-n} = \frac{1}{m+n} - \frac{x-n}{m^2-n^2} + \frac{2x}{m}$;

27) $\frac{x}{a} - \frac{a+b}{x} = \frac{x-a}{a}$; 28) $\frac{m}{m-x} + \frac{b^2}{cx-cm} = \frac{mc-b^2}{c}$;

29) $\frac{c+y}{cy} = \frac{1}{c} + \frac{c}{c+y}$; 30) $\frac{a}{ac+bc} + \frac{a-b}{2bx} = \frac{a+b}{2bc} - \frac{b}{ax+bx}$.

12.2 SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

△ **1711.** a) Odrediti rešenje datog sistema linearnih jednačina grafičkom metodom:

1) $x-y=0 \wedge x+y=2$; 2) $2x+y=4 \wedge x+2y=5$;

3) $-x+y=2 \wedge 2x-y=-1$

b) Uveriti se grafičkom metodom da su sledeći sistemi linearnih jednačina nemogući, tj, da nemaju rešenja:

1) $x+y=-1 \wedge x+y=1$; 2) $2x+y=3 \wedge 2x+y=4$;

c) Grafičkom metodom uveriti se da dati sistemi linearnih jednačina imaju beskonačno mnogo rešenja, tj. da su neodređeni:

1) $x+y=1 \wedge 2x+2y=2$; 2) $-x-2y=0 \wedge 2x+4y=0$.

1712. Utvrditi da li je dati sistem saglasan, neodređen ili nesaglasan:

1) $\begin{array}{l}5x-4y=13\\2x-3y=1\end{array}$ 2) $\begin{array}{l}4x-6y=7\\8x-12y=15\end{array}$ 3) $\begin{array}{l}10x-15y=7\\6x-9y=4,2\end{array}$

4) $\begin{array}{l}4x+6y=3\\6x+9y=4,5\end{array}$ 5) $\begin{array}{l}2x-3y=4\\4x-6y=5\end{array}$ 6) $\begin{array}{l}12x+16y+1=0\\3x+4y+2=0\end{array}$

7) $\begin{array}{l}28x+35y+3=0\\12x+15y+25=0\end{array}$

△ **1713.** Znamo da se polinom $ad-bc$ naziva **determinantom drugog reda** i označava se sa $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Sistem linearnih jednačina s dve napoznate rešava se pomoću determinanti na sledeći način:

$$\begin{array}{l}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{array} \Longleftrightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \wedge y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \vee \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0,$$

a) Izračunati determinante:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$.

b) Koristeći determinante rešiti sisteme jednačina:

1) $\begin{array}{l}3x+4y=-1\\2x-y=3\end{array}$ 2) $\begin{array}{l}x+y=2\\x-y=0\end{array}$ 3) $\begin{array}{l}x-2y=-5\\-2x+y=1\end{array}$

4) $\begin{array}{l}x+5y=17\\3x-y=3\end{array}$ 5) $\begin{array}{l}6x-7y=40\\5x-2y=-8\end{array}$ 6) $\begin{array}{l}2x-3y=8\\7x-5y=-5\end{array}$

7) $\begin{array}{l}25x-4y+1=0\\31x-5y+16=0\end{array}$

1714. Raznim metodama rešiti sisteme jednačina:

a) $\begin{array}{l}(x-1)(y+2)-(x-2)(y+5)=0\\(x+4)(y-3)-(x+7)(y-4)=0\end{array}$ *b)* $\begin{array}{l}(x+3)(y+5)=(x+1)(y+8)\\(2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1)\end{array}$

c) $\begin{array}{l}x+5y=19\\-4y=-19-3x\end{array}$ *d)* $\begin{array}{l}x=-7-3y\\x=3+2y\end{array}$ *e)* $\begin{array}{l}3x+2y=12\\3x-2y=0\end{array}$

f) $\begin{array}{l}\dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{9}=-1\\\dfrac{5x}{9}+\dfrac{4y}{6}=15\dfrac{1}{3}\end{array}$ *g)* $\begin{array}{l}\dfrac{6x+5y}{8}=2\\\dfrac{6x+y}{8}=1\end{array}$ *h)* $\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{4}+\dfrac{2x-y}{2}=\dfrac{7}{4}\\\dfrac{2x-3}{3}+\dfrac{x-2y}{5}=-\dfrac{7}{15}\end{array}$

i) $\dfrac{x+y}{3}-\dfrac{y}{5}=-2$, $\dfrac{2x-y}{3}-\dfrac{3x}{4}=\dfrac{3}{2}$ *j)* $\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{3y-2}{4}=2$, $\dfrac{3x+1}{5}-\dfrac{3y+12}{4}=0$ *k)* $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{2(x-y)}{5}$, $\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{y-3}{3}=2y-x$

l) $\dfrac{0,2x+0,1y}{2}-\dfrac{4x-y}{10}=\dfrac{3x+0,5y}{30}+\dfrac{x-y}{5}$, $\dfrac{3x+2y-1}{8}=3-\dfrac{0,8x-5y}{41}$ *m)* $x:y=3:4$, $(x-1):(y+2)=1:2$

1715. Uvođenjem novih nepoznatih rešiti sisteme jednačina:

$\triangle$*a)* $\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=16$, $\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=4$ *b)* $\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{y}=-13$, $\dfrac{6}{x}+\dfrac{4}{y}=24$ *c)* $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y-4}=5$, $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{1}{y-4}=3$

d) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=30$, $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=31$ $\triangle$*e)* $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{5}{8}$, $\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{3}{8}$ *f)* $\dfrac{10}{x-5}+\dfrac{1}{y+2}=1$, $\dfrac{25}{x-5}+\dfrac{3}{y+2}=2$

g) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y+1}=\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{y+1}=\dfrac{1}{4}$ $\triangle$*h)* $\dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13$, $\dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1$

i) $\dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{1-x-y}=0,1$, $\dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}=0,3$

1716. Rešiti sisteme jednačina:

a) $2x+3|y|=13$, $3x-y=3$ *b)* $|x-1|+|y-5|=1$, $|x-1|-y=-5$ *c)* $|x+1|+|y-1|=5$, $|x+1|-4y=-4$

d) $x-|y-4|=4$, $|x-3|+|y-4|=3$ *e)* $|x+y|=1$, $|x|+y=1$ *f)* $|2x+3y|=5$, $|2x-3y|=1$

g) $2x-3|y|=1$, $|x|+2y=4$ *h)* $y-2|x|+3=0$, $|y|+x-3=0$ *i)* $|x|+|y-1|=1$, $x+2y=3$

△ **1717.** Odrediti vrednost parametra k, tako da imaju jedinstvena rešenja sistemi jednačina:

$$a)\ \begin{aligned} 3x+ky&=5+k\\ 2x+5y&=8\end{aligned}\qquad b)\ \begin{aligned} kx+(k+1)y&=3\\ 2x+3y&=k-1\end{aligned}$$

△ **1718.** Odrediti vrednosti parametara tako da budu neodređeni sistemi (tj. da imaju beskonačno mnogo rešenja):

$$a)\ \begin{aligned}(2k-1)x+ky&=6\\ 7,5x+4y&=3\end{aligned}\qquad b)\ \begin{aligned}2x+(m-1)y&=3\\ (m+1)x+4y&=-3\end{aligned}\qquad c)\ \begin{aligned}5x+3y&=b\\ 10x+ay&=42\end{aligned}$$

$$d)\ \begin{aligned}(m+n-2)x+(m+2n)y&=6\\ nx+3y&=3\end{aligned}\qquad e)\ \begin{aligned}(1+a)x+(a+b)y&=b-a\\ (5+a)x+2(a+b)y&=b-1,\ \text{gde } a+b\neq 0\end{aligned}$$

△ **1719.** Odrediti vrednosti parametara tako da sistemi jednačina nemaju (imaju) rešenja:

$$a)\ \begin{aligned}(1+2k)x+5y&=7\\ (2+k)x+4y&=8\end{aligned}\qquad b)\ \begin{aligned}ax+(b-2)y&=5a\\ bx+4y&=3-b\end{aligned}\qquad c)\ \begin{aligned}x+2y&=6\\ 4x-ay&=b\end{aligned}$$

1720. Sistem $\begin{aligned}a_1x+b_1y&=c_1\\ a_2x+b_2y&=c_2\end{aligned}$ određen je (saglasan je) ako je $a_1b_2\neq a_2b_1$, odnosno ako: $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$. Sistem je *protivrečan*, tj. nema rešenja, ako: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$. Najzad, ako je ispunjen uslov: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$, sistem je ekvivalentan sa $0\cdot x+0\cdot y=0\wedge a_1x+b_1y=c_1$, tj. ekvivalentan je prvoj jednačini. Tada, ako je $a_1=b_1=0$ i $c_1\neq 0$, sistem je nemoguć, tj. nema rešenja, a ako je $a_1=b_1=c_1=0$, ili bar jedan od koeficijenata a_1, b_1 nije jednak nuli, sistem je *neodređen* i ima beskonačno mnogo rešenja.

Utvrditi za koje vrednosti parametara, navedeni sistemi jednačina sa dve nepoznate, x i y, su *saglasni* (imaju jedinstveno rešenje), *protivrečni* (nemogući) ili *neodređeni*, tj. *diskutovati rešenja* sledećih sistema:

$$\triangle a)\ \begin{aligned}x+ay&=6\\ 2x+ay&=7\end{aligned}\qquad b)\ \begin{aligned}ax+y&=5a\\ x+2y&=3a\end{aligned}\qquad \triangle c)\ \begin{aligned}ax+2ay&=5\\ x+y&=3\end{aligned}$$

$$d)\ \begin{aligned}(a+1)x-y&=1\\ ax+4y&=10\end{aligned}\qquad \triangle e)\ \begin{aligned}\frac{x}{a}+y&=1\\ \frac{x}{b}-y&=0\end{aligned}\qquad f)\ \begin{aligned}ax+y&=b\\ \frac{1}{b}x+y&=a\end{aligned}$$

$$g)\ \begin{aligned}mx+y&=1\\ 2x+y&=2\end{aligned}\qquad \triangle h)\ \begin{aligned}2ax-3by&=12ab\\ ax+by&=ab\end{aligned}\qquad \triangle i)\ \begin{aligned}ax-3y&=a\\ (a-4)x+(a-7)y&=-6\end{aligned}$$

$$j)\ \begin{aligned}(m-1)x+2my&=-2\\ 2mx+(m-1)y&=m-1\end{aligned}\qquad k)\ \begin{aligned}a^2x-y&=a-b\\ b^3x+ay&=b^2\end{aligned}$$

$l)\ \begin{cases} x+y=1 \\ x+a^2y=a \end{cases}$ $\quad m)\ \begin{cases} \dfrac{x-a}{b}+\dfrac{y-b}{a}=1 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \end{cases}$ $\quad n)\ \begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2 \\ \dfrac{x}{a-b}-\dfrac{y}{a+b}=\dfrac{4ab}{a^2-b^2} \end{cases}$

$o)\ \begin{cases} \dfrac{2ax}{b}-\dfrac{3by}{a}+1=\dfrac{2a}{b}+\dfrac{3b}{a} \\ \dfrac{ax}{b}-\dfrac{by}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab} \end{cases}$ $\quad p)\ \begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=a+b \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2a \end{cases}$

$q)\ \begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2a \\ x-y=4ab \end{cases}$ $\quad r)\ \begin{cases} \dfrac{a}{x-a}+\dfrac{y}{y-b}=2 \\ ax+by=2ab \end{cases}$ $\quad s)\ \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{a}{b-c} \\ \dfrac{x+c}{y-b}=\dfrac{a+b}{a+c} \end{cases}$

$t)\ \begin{cases} \dfrac{x}{a-p}+\dfrac{y}{b-p}=1 \\ \dfrac{x}{a-q}+\dfrac{y}{b-q}=1,\ a\neq b,\ p\neq q \end{cases}$ $\quad u)\ \begin{cases} ax+by=c^2 \\ \dfrac{a+x}{b}=\dfrac{b+y}{a},\ a\neq 0,\ b\neq 0 \end{cases}$

△ **1721.** Sistem linearnih jednačina sa tri nepoznate: $\begin{aligned} x-y+z&=5 \\ 2y-z&=-8 \\ 3z&=6 \end{aligned}$ ima tzv. *trougaoni oblik*; rešava se jednostavnim postupkom. Iz treće jednačine je $z=2$. Zamenom u drugu jednačinu dobijamo: $2y-2=-8$, odakle je $y=-3$. Sada u prvoj jednačini zamenimo y i z i dobijemo $x=0$.

Postupajući slično, rešiti sledeće sisteme linearnih jednačina:

$a)\ \begin{aligned} x+y&=3 \\ y&=1 \end{aligned}$ $\quad b)\ \begin{aligned} 2x-5y&=5 \\ 3y&=3 \end{aligned}$ $\quad c)\ \begin{aligned} 7x-3y&=8 \\ 5y&=10 \end{aligned}$

$d)\ \begin{aligned} -10x-5y&=20 \\ -2x&=2 \end{aligned}$ $\quad e)\ \begin{aligned} x+y+3z&=14 \\ 2y+4z&=16 \\ 5z&=15 \end{aligned}$ $\quad f)\ \begin{aligned} 2x+3y+z&=14 \\ 2x+4y&=10 \\ 5x&=25 \end{aligned}$

$g)\ \begin{aligned} x-y+z+u&=0 \\ 3x+2y-z&=-4 \\ 2x-3y&=-2 \\ 4x&=-4 \end{aligned}$ $\quad h)\ \begin{aligned} 3x+3y-4z+5u&=9 \\ 2x-3y-z&=-4 \\ 4x+5y&=1 \\ 3x&=-3 \end{aligned}$ $\quad i)\ \begin{aligned} x+y+z+u+v&=10 \\ 4y+5z-u-v&=1 \\ 3z+2u-v&=2 \\ 4u-3v&=0 \\ 2v&=8 \end{aligned}$

△ **1722.** Postupnim eliminisanjem nepoznatih, sistem se može dovesti na trougaoni oblik – to je tzv. *Gausov postupak*. Gausovom metodom rešiti sisteme linearnih jednačina:

a) $2x + 3y + z = 7$, $-3x + y - 4z = -10$, $5x + 4y - 2z = 5$

b) $x + 2y - 3z = 5$, $2x + 3y - 5z = 8$, $5x + y - 6z = 7$

c) $3x + 5y - z = 8$, $5x + 3y + z = 0$, $2x + 4y + 5z = -11$

d) $x + y + z + u = 6$, $2x - 3y + 4z - u = -2$, $x + y + 3z - 4u = -2$, $3x - 2y + 4z + 2u = 7$

e) $x + y + z + u = 0$, $2x + y + 2z - u = 9$, $3x - y - 3z + u = -2$, $4x - y - z - u = 10$

△ **1723.** Raznim metodama rešiti sisteme jednačina:

a) $x + 2y - z = 2$, $2x + y + z = 7$, $x + y + z = 6$

b) $x + 2y + 3z = 80$, $5x - 2y = 70$, $3x + 2z = 80$

c) $x + 9y + 10z = 4$, $4x + 9z = 6$, $2x - 6y - 5z = 10$

d) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$, $3x - 2y + z = 18$

e) $x + y + z = 39$, $y + z + u = 45$, $z + u + x = 43$, $u + x + y = 41$

f) $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3$, $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 5$, $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 4$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 7$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 11$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$

1724. Uvođenjem novih nepoznatih rešiti sisteme jednačina:

a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 9$, $\frac{3}{x} - \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = 14$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = -1$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = -2$, $\frac{1}{x} - \frac{5}{y} - \frac{7}{z} = 3$

c) $\frac{1}{x-2} - \frac{3}{y-3} + \frac{1}{z+1} = -1$, $\frac{2}{x-2} - \frac{5}{y-3} - \frac{3}{z+1} = -6$, $\frac{5}{x-2} + \frac{2}{y-3} - \frac{1}{z+1} = 6$

d) $3xy = 2(x + y)$, $5yz = 6(y + z)$, $4zx = 3(z + x)$

⋆ **1725.** Rešiti na pogodne načine sisteme jednačina:

a) $x + y = a$, $y + z = b$, $z + x = c$

b) $ax + y + z = 1$, $x + ay + z = a$, $x + y + az = a^2$

c) $x + y + z = 0$, $ax + by + cz = 0$, $bcx + acy + abz = 1$

d) $x+y+z+a(x+y)+a^2x=a^3$
$x+y+z+b(x+y)+b^2x=b^3$
$x+y+z+c(x+y)+c^2x=c^3$

e) $x-y+z=0$
$(a+b)x-(a+c)y+(b+c)z=0$
$abx-acy+bcz=1$

f) $ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=a+b+c$

g) $ax+y+z=1$ h) $\dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{1}{c}$

$x+by+z=1$ $\dfrac{yz}{bz+cy}=\dfrac{1}{a}$

$x+y+cz=1$ $\dfrac{zx}{az+cx}=\dfrac{1}{b}$

i) $\dfrac{x_1-a_1}{m_1}=\dfrac{x_2-a_2}{m_2}=\cdots=\dfrac{x_n-a_n}{m_n}$
$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$
$m_1+m_2+\cdots+m_n\neq 0$

12.3 *DIOFANTSKE JEDNAČINE

U ovom odeljku rešavamo uglavnom nelinearne jednačine, čija su rešenja obavezno celi brojevi i koje se svode na linearne jednačine.

1726. U skupu celih brojeva rešiti linearne jednačine $(x,y\in D)$:
a) $60x-77y=1$; b) $3x-4y=5$

1727. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačine (p je prost broj):
a) $x^2-y^2=8$; b) $x^2-y^2=13$; c) $x^2-y^2=105$;
d) $2(x^2-y^2)=1978$; e) $2x+xy=7$; f) $xy+x+y$;
g) $x+y=(x-y)^2$; h) $x^2+2xy-3y^2=5$; i) $2x^2+5xy-12y^2=28$;
j) $xy-3x+2y=8$; k) $x^2=y^2+2y+12$; l) $x^4-y^4=175$;
m) $p(x+y)=xy$; n) $5p+1=x^2$; o) $x^4+4=p$;
p) $xyz=x+y+z$; q) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}=1.$

1728. Naći celobrojna rešenja jednačina:
a) $x^2-xy+2x-3y=11$; b) $xy=10x+10y,\ x,y\in N$; c) $2(x+y)=xy$;
d) $xy-x=2+y^3$; e) $x^2+y^2=1$; f) $x^2+y^2-2x-4y+4=0$;
g) $x^2+xy+y^2=1$; h) $x^2+4y^2+z^4=2x-20y-23.$